

Viera Pacáková, Erik Šoltés, Tatiana Šoltésová

Úvod

Teória kredibility patrí medzi tzv. techniku „experience rating“ a slúži na kalkuláciu a permanentnú úpravu poistného. Podobne ako Bayesovské odhady, aj odhady získané kredibilnými modelmi vychádzajú z apriórnych informácií z portfólia poisťiek a z individuálnych informácií. Kredibilné odhady poistného v porovnaní s Bayesovskými odhadmi sú relatívne jednoduché a stanovené poistné je jasne interpretovateľné. Vďaka uvedeným skutočnostiam má teória kredibility veľké možnosti aplikácie v aktuárskej praxi. Bühlmannov-Straubov model možno použiť priamo na stanovenie netto poistného, alebo ním možno získať kredibilný odhad dvoch zložiek poistného, a to škodovej frekvencie a priemernej výšky poistných škôd.

Bühlmannov-Straubov model je bezpochyby najdôležitejší model v teórii kredibility. Jeho význam spočíva v širokých možnostiach jeho aplikácie v aktuárskej praxi neživotného poistenia, životného poistenia a zaistenia. Okrem toho Bühlmannov-Straubov model predstavuje základ pre ďalšie špecifickejšie kredibilné modely, ako sú hierarchické a regresné kredibilné modely. V príspevku opisujeme techniku kredibilného odhadu škodovej frekvencie týmto modelom a aplikujeme ju na príklade povinného zmluvného poistenia motorových vozidiel.

1. Bühlmannov-Straubov model na výpočet kredibilného poistného

Predpokladajme, že portfólio je rozdelené do l rizik alebo rizikových tried, pre ktoré chceme stanoviť poistné. i -ta riziková trieda ($i=1, 2, \dots, l$) je charakterizovaná individuálnym profilom rizika \mathcal{G}_i , ktorý je realizáciou náhodnej premennej θ_i (bližšie pozri [1] až [4]). Štandardne sú pre každú rizikovú triedu známe tieto charakteristiky:

N_{ij} - počet poistných škôd pre riziko i ($i=1, 2, \dots, l$) v roku j ($j=1, 2, \dots, n$)

w_{ij} - asociovaná váha pre riziko i v roku j

$F_{ij} = \frac{N_{ij}}{w_{ij}}$ škodová frekvencia pre riziko i v roku j

Ďalej nech sú splnené podmienky Bühlmannovho-Straubovho modelu (bližšie pozri [1] až [4]):

BS1: Podmienene pre dané θ_i sú N_{ij} pre $j=1, 2, \dots, n$ nezávislé s Poissonovým rozdelením pravdepodobnosti s parametrom: $\lambda_{ij}(\theta_i) = w_{ij} \theta_i \lambda_0$

BS2: Dvojice (θ_1, N_1) , (θ_2, N_2) , ... sú nezávislé a $\theta_1, \theta_2, \dots$ sú nezávislé a rovnako rozdelené so strednou hodnotou $E[\theta_i]=1$.

Empirický kredibilný odhad škodovej frekvencie je za predpokladu platnosti **BS1** a **BS2** definovaný vzťahom

$$\hat{\lambda}_{ij}(\theta_i)^{emp} = \alpha_i F_{ij} + (1 - \alpha_i) \hat{\lambda}_0 \quad (1)$$

pričom

- F_i je škodová frekvencia v rizikovej triede i a vypočíta sa ako vážený aritmetický priemer:

$$F_i = \sum_j F_{ij} \frac{w_{ij}}{w_{i\cdot}} \quad \text{kde } w_{i\cdot} = \sum_j w_{ij} \quad (2)$$

Táto štatistika predstavuje odhad škodovej frekvencie len na základe individuálnych informácií z i -tej rizikovej skupiny bez zohľadnenia apriórnych informácií, teda informácií z celého portfólia.

- $\hat{\lambda}_0$ je odhadom kolektívnej škodovej frekvencie. Tento odhad je založený výlučne na apriórnych informáciách a nezohľadňuje rozdiely medzi rizikovými skupinami. Intuitívne je odhadom λ_0 priemernej škodovej frekvencie v celom portfóliu $\bar{F} = \sum_{i=1}^l F_i \frac{w_{i\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}$ ($w_{\cdot\cdot} = \sum_i w_{i\cdot}$), no dá sa dokázať (pozri napr. [1]), že lepším odhadom λ_0 je

$$\hat{\lambda}_0 = \sum_{i=1}^l F_i \frac{\alpha_i}{\alpha_{\cdot}}, \quad \text{kde } \alpha_{\cdot} = \sum_{i=1}^l \alpha_i \quad (3)$$

- α_i je faktor kredibility alebo váha kredibility. Faktor kredibility nadobúda hodnoty z intervalu $(0; 1)$ a odhadne sa podľa vzťahu

$$\hat{\alpha}_i = \frac{w_{i\cdot}}{w_{i\cdot} + \kappa} \quad (4)$$

pričom κ - kvocient kredibility je definovaný vzťahom

$$\kappa = \frac{\lambda_0}{\tau^2} \quad (5)$$

kde

τ^2 je rozptyl individuálnych škodových frekvencií v celom portfóliu.

Podľa vzťahu (1) je kredibilným odhadom škodovej frekvencie vážený aritmetický priemer individuálnej a kolektívnej škodovej frekvencie, pričom váhou pre individuálnu škodovú frekvenciu je faktor kredibility α_i a váhou pre kolektívnu škodovú frekvenciu je jeho doplnok do 1. Ak sa pozrieme na vzťahy (4) a (5), zistíme že kredibilita individuálnej škodovej frekvencie pre i -tu rizikovú skupinu rastie s počtom pozorovaných rokov ($w_{i\cdot}$) pre túto rizikovú skupinu, klesá s nárastom vnútornej skupinovej variability ($\sigma^2 = \lambda_0$) a rastie s nárastom variability v celom portfóliu (τ^2). Kredibilný odhad škodovej frekvencie sa odvíja od charakteristik variability λ_0 a τ^2 , ktoré sú neznáme. Tieto tzv. štrukturálne parametre sa odhadujú z údajov celého portfólia.

2. Odhad štrukturálnych parametrov λ_0 a τ^2

Na odhad štrukturálnych parametrov λ_0 a τ^2 sa používa iteratívny postup:

Najprv sa vyčíslia charakteristiky

$$c = \frac{I-1}{I} \left\{ \sum_{i=1}^I \left(1 - \frac{w_{i\cdot}}{w_{\cdot\cdot}} \right) \frac{w_{i\cdot}}{w_{\cdot\cdot}} \right\}^{-1} \quad (6)$$

$$T = \frac{I}{I-1} \sum_{i=1}^I (F_i - \bar{F})^2 \frac{w_{i\cdot}}{w_{\cdot\cdot}} \quad (7)$$

Potom sa začne so štartovacími hodnotami

$$^{(0)}\hat{\lambda}_0 = \bar{F} \quad (8)$$

$$^{(0)}\hat{\tau}^2 = c \cdot \left\{ T - \frac{I^{(0)}\hat{\lambda}_0}{w_{\cdot\cdot}} \right\} \quad (9)$$

a v iterácii z kroku n do kroku $n+1$ sa vypočítajú štatistiky

$$^{(n)}\hat{\lambda}_0 = \frac{^{(n)}\hat{\lambda}_0}{^{(n)}\hat{\tau}^2} \quad ^{(n)}\alpha_i = \frac{w_{i\cdot}}{w_{i\cdot} + ^{(n)}\hat{\lambda}_0} \quad (10)$$

$$^{(n+1)}\hat{\lambda}_0 = \sum_{i=1}^I F_i \frac{^{(n)}\alpha_i}{^{(n)}\alpha_{\cdot}} \quad ^{(n+1)}\hat{\tau}^2 = c \cdot \left\{ T - \frac{I^{(n+1)}\hat{\lambda}_0}{w_{\cdot\cdot}} \right\} \quad (11)$$

Poznámky:

- Ak pracujeme s vyváženou vzorkou, t. j. $w_{1\cdot} = 2_{\cdot} = \dots = w_{i\cdot}$, tak $c=1$. Ak sú počty pozorovaných rokov w_i rôzne, čo je zvyčajná situácia, tak $c > 1$.

- Ak nastane situácia, že $\hat{\tau}^2$ bude záporné, tak sa nedajú zistiť rozdiely medzi rizikovými skupinami a vtedy parameter τ^2 položíme rovný 0. V takejto situácii je faktor kredibility $\hat{\alpha}_i = 0$ a kredibilným odhadom škodovej frekvencie je kolektívna frekvencia $\bar{F} = \sum_{i=1}^I F_i \frac{w_{i\cdot}}{w_{\cdot\cdot}}$.

3. Vlastnosť rovnováhy

Kredibilný odhad škodovej frekvencie získaný Bühlmannovým-Straubovým modelom (1) spĺňa tzv. *vlastnosť rovnováhy*:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^I \hat{\lambda}(\theta) \text{emp} w_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^I F_{ij} w_{ij} = N_{\cdot\cdot} \quad (12)$$

resp.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^I \hat{\lambda}(\theta) \text{emp} \frac{w_{ij}}{w_{\cdot\cdot}} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^I F_{ij} \frac{w_{ij}}{w_{\cdot\cdot}} = \bar{F} \quad (13)$$

To znamená, že ak by sa v celom pozorovanom období n rokov zachoval počet pozorovaných rokov w_{ij} v jednotlivých rizikových skupinách $i=1, 2, \dots, I$, tak nahradením individuálnych škodových frekvencií - F_{ij} kredibilnými odhadmi škodových frekvencií - $\hat{\lambda}(\theta) \text{emp}$ nedôjde k zmene počtu poistných škôd $N_{\cdot\cdot}$ v celom portfóliu za celé sledované obdobie n rokov, resp. nedôjde k zmene škodovej frekvencie \bar{F} v celom portfóliu za celé sledované obdobie n rokov.

4. Aplikácia

Predpokladajme, že v poistení motorových vozidiel sú rizikové skupiny definované podľa dvoch kritérií: účel, na aký sa vozidlo používa (A alebo B) a typ vozidla (typ 1 až typ 5). Na základe týchto dvoch kritérií je definovaných 10 rizikových skupín: $A_1, A_2, \dots, A_5, B_1, B_2, \dots, B_5$, u ktorých boli zistené počty rokov poistenia (tab. 1) a počet poistných škôd (tab. 2) v priebehu predchádzajúcich 5 rokov.

Aktuárskou úlohou je na základe skúseností z predchádzajúcich piatich rokov odhadnúť na nasledujúci rok škodové frekvencie v jednotlivých rizikových skupinách.

Podielom N_{ij} a $w_{i\cdot}$ dostaneme F_{ij} - škodovú frekvenciu v i -tej rizikovej skupine (tab. 3). Tento podiel je individuálnou škodovou frekvenciou pre i -tu rizikovú skupinu.

Pri iteračnom postupe odhadovania štrukturálnych parametrov λ_0 a τ^2 najskôr podľa vzťahov (6) a (7) vypočítame charakteristiky $c = 1,0774$ a $T = 1,0013$. V jednotlivých iteráciách potom podľa vzťahov (8) až

FINANCE

(11) postupne odhadneme charakteristiky λ_0 , τ^2 , κ (tab. 4) a faktory kredibility (tab. 5).

V tretej iterácii už v podstate nedochádza k zmeně faktorov kredibility, a preto faktory kredibility získané v druhej iterácii a uvedené v poslednom riadku tab. 5 môžeme použiť na kredibilný odhad škodovej

frekvencie v jednotlivých rizikových triedach. Na individuálne údaje sa môžeme najväčšou mierou spoľahnúť v rizikovej triede A5. Vierohodnosť týchto údajov pri odhade škodovej frekvencie pre túto rizikovú skupinu je až 99,1%, a to vďaka relatívne veľkému počtu pozorovaných rokov $w_{A5} = 9669$.

Tab. 1: Počet pozorovaných rokov

Rok j	w_{ij} - počet pozorovaných rokov pre rizikovú skupinu										Spolu $w_{.j}$
	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5	
1	1 256	1 519	1 366	1 171	2 462	76	206	168	251	716	9 191
2	1 292	1 551	1 502	1 053	2 498	81	189	162	226	749	9 303
3	1 164	1 387	1 238	836	1 937	67	152	126	164	565	7 636
4	1 081	1 291	1 028	675	1 585	68	122	104	117	445	6 516
5	977	1 161	778	530	1 187	55	111	92	110	326	5 327
Spolu $w_{i.}$	5 770	6 909	5 912	4 265	9 669	347	780	652	868	2 801	37 973

Zdroj: nemenovaná poisťovňa

Tab. 2: Počet poistných škôd za posledných 5 rokov

počet	riziková trieda										Spolu
	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5	
N_i	353	524	476	395	1 241	47	138	64	129	469	3 836

Zdroj: nemenovaná poisťovňa

Tab. 3: Škodová frekvencia (v %) za posledných 5 rokov

škodová frekvencia	riziková trieda										Spolu
	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5	
F_i	6,1	7,6	8,1	9,3	12,8	13,5	17,7	9,8	14,9	16,7	10,1

Zdroj: vlastné výpočty

Tab. 4: Odhad charakteristík λ_0 , τ^2 , κ v jednotlivých iteráciách

Charakteristika	0. iterácia	1. iterácia	2. iterácia
$^{(n)}\hat{\lambda}_0$	0,1010	0,1156	0,1154
$^{(n)}\hat{\tau}^2$	0,001320	0,001316	0,001316
$^{(n)}\hat{\kappa}$	76,5293	87,8259	87,7269

Zdroj: vlastné výpočty

Tab. 5: Úprava faktorov kredibility v jednotlivých iteráciách

faktor kredibility	riziková trieda										Spolu
	A1	A2	A3	A4	A5	B1	B2	B3	B4	B5	
	0,987	0,989	0,987	0,982	0,992	0,819	0,911	0,895	0,919	0,973	9,455
	0,985	0,987	0,985	0,980	0,991	0,798	0,899	0,881	0,908	0,970	9,384
	0,985	0,987	0,985	0,980	0,991	0,798	0,899	0,881	0,908	0,970	9,385

Zdroj: vlastné výpočty

Tab. 6: Faktory kredibility a kredibilné odhady škodových frekvencií

riziková trieda	w_i - počet pozorovaných rokov	F_i - škodová frekvencia	kredibilný odhad	
			faktor kredibility α_i	škodová frekvencia $\lambda(\theta)$
A1	5 770	6,1 %	0,985	6,2 %
A2	6 908	7,6 %	0,987	7,6 %
A3	5 912	8,1 %	0,985	8,1 %
A4	4 265	9,3 %	0,980	9,3 %
A5	9 669	12,8 %	0,991	12,8 %
B1	347	13,5 %	0,798	13,1 %
B2	780	17,7 %	0,899	17,1 %
B3	652	9,8 %	0,881	10,0 %
B4	868	14,9 %	0,908	14,6 %
B5	2 801	16,7 %	0,970	16,6 %
Spolu	37 973	10,1 %	x	10,1 %

Zdroj: vlastné výpočty

Naopak, najmenšiu vierohodnosť 79,8% majú individuálne údaje z rizikovej skupiny B1, kde bol počet pozorovaných rokov „len“ 347.

Kredibilné odhady škodových frekvencií v rizikových triedach A1, A2, ..., A5, B1, B2, ..., B5 sú uvedené v poslednom stĺpci tab. 6. Na základe agregovaných charakteristík vypočítaných v poslednom riadku tab. 6 je zjavné, že stanovené kredibilné poistné spĺňa vlastnosť rovnováhy.

Teória kredibility ponúka v súčasnosti rôzne typy modelov kredibility. Na riešenie nastoleného problému odhadu škodovej frekvencie pri danej štruktúre údajov možno efektívne použiť okrem samotného Bühlmannovho-Straubovho modelu aj model hierarchickej kredibility alebo model viacrozmernej kredibility. Tieto modely sú zovšeobecnením základných myšlienok Bühlmannovho-Straubovho modelu pre hierarchickú, resp. viacrozmernú štruktúru údajov.

Identifikácia výskumného projektu:

Príspevok je spracovaný v rámci projektov VEGA č. 1/0724/08 *Riadenie rizík neživotného poistenia podľa direktívy Európskej komisie SOLVENCY II a GA ČR č. 402/09/1866 Modelování, simulace a řízení pojistných rizik.*

Literatúra:

- [1] BÜHLMANN, H., GISLER, A. *A Course in Credibility Theory and its Applications*. Berlin: Springer 2005. ISBN 3-540-25753-5.
 [2] GOOVAERTS, M. J., KAAS, R., VAN HEERWAARDEN, A. E., BAUWELINCKX, T. *Effective*

Actuarial Methods. Amsterdam: North-Holland 1990. ISBN 0444883991.

[3] NELDER, J., VERRALL, R. *Credibility theory and generalized linear models. ASTIN Colloquium 1995. ASTIN Bulletin*, No. 27, pp. 71-82. ISSN 0515-0361.

[4] PACÁKOVÁ, V. *Aplikovaná poistná štatistika*. Bratislava: IURA Edition 2004. ISBN 80-8078-004-8.

prof. RNDr. Viera Pacáková, PhD.

Univerzita Pardubice
 Fakulta ekonomicko-správni
 Studentská 84
 532 10 Pardubice
 vpacakova@gmail.com

Mgr. Erik Šoltés, PhD.

Mgr. Tatiana Šoltéssová, PhD.

Ekonomická univerzita v Bratislave
 Fakulta hospodárskej informatiky
 Dolnozemska cesta 1/b
 852 35 Bratislava
 erik.soltes@euba.sk
 tatiana.soltesova@euba.sk

Doručeno redakci: 5. 12. 2008

Recenzováno: 21. 1. 2009; 21. 2. 2009

Schváleno k publikovaniu: 6. 4. 2009

ABSTRACT

CREDIBILITY ESTIMATION OF THE CLAIM FREQUENCY

Viera Pacáková, Erik Šoltés, Tatiana Šoltésová

Credibility theory in insurance is essentially a form of experience-rating that attempts to use the data in hand as well as the experience of others in determining rates and premiums. Two types of data are used in the process of estimation using models based on the theory of credibility: data about own insurance risk and data about comparable insurance risks. The predictor for the next year's experience that is linear in the claims experience and optimal in the sense of least squares turns out to be a weighted average of the claims experience of the individual contract and the experience for the whole portfolio. The weight factor is the credibility attached to the individual experience, hence it is called the credibility factor, and the resulting premiums are called credibility premiums.

In this article we review the Bühlmann-Straub model that is the most important credibility model and has a lot of application in non-life and life insurance as well as in reinsurance. The Bühlmann-Straub model belongs to the greatest accuracy credibility theory. Credibility estimators produced by this approach are such linear Bayes estimators that minimize the mean squared error (MSE). Credibility estimators compared with Bayes estimators don't require the choice of a prior distribution. Bühlmann showed that credibility estimators depend only on first and second moments that are easy to estimate from statistical data.

This paper describes the technique of the credibility estimation for the claim frequency under assumptions of the Bühlmann-Straub model. The paper also includes the application of this credibility theory and techniques in third party motor vehicle insurance.

Key Words: *credibility theory, Bühlmann-Straub model, claim frequency, estimation of structural parameters, third party motor vehicle insurance.*

JEL Classifications: C11, C13, G22.